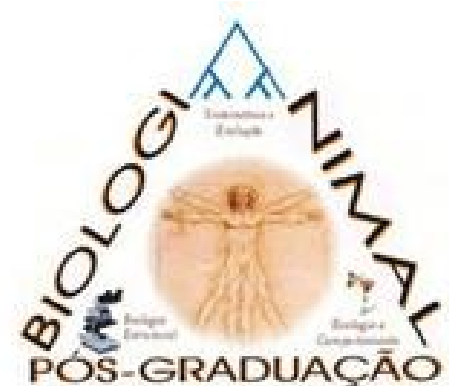


Estatística aplicada à ecologia usando o



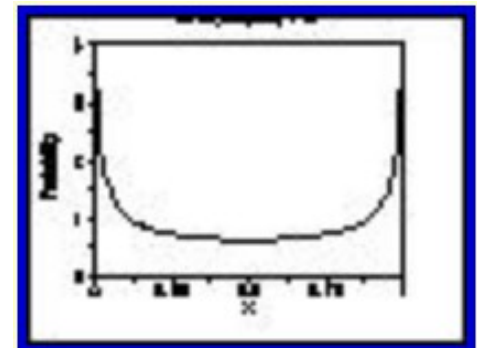
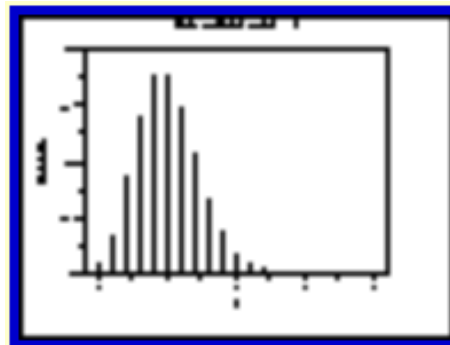
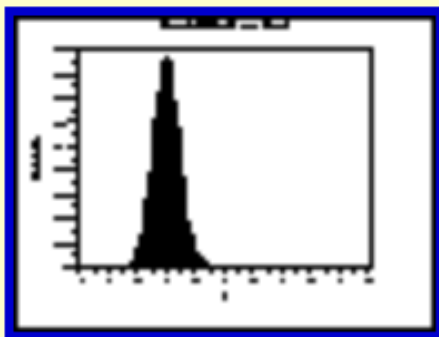
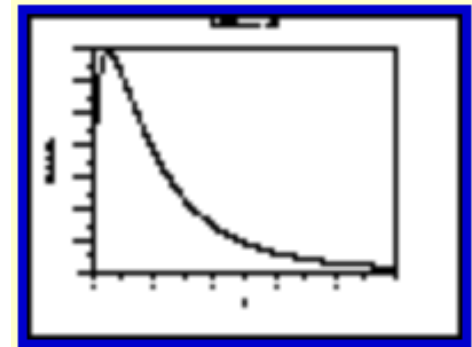
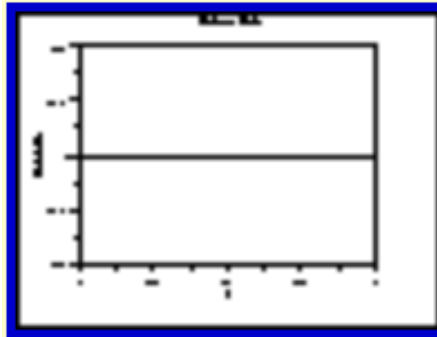
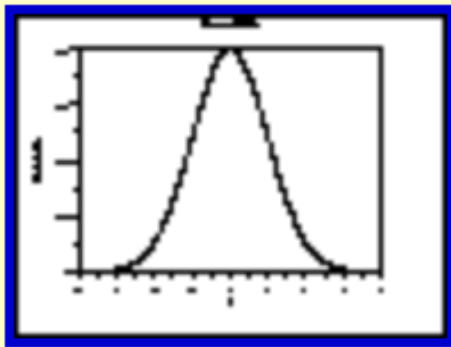
DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS

Docentes: Fernando Rodrigues da Silva
Diogo Borges Provete
Thiago Gonçalves Souza

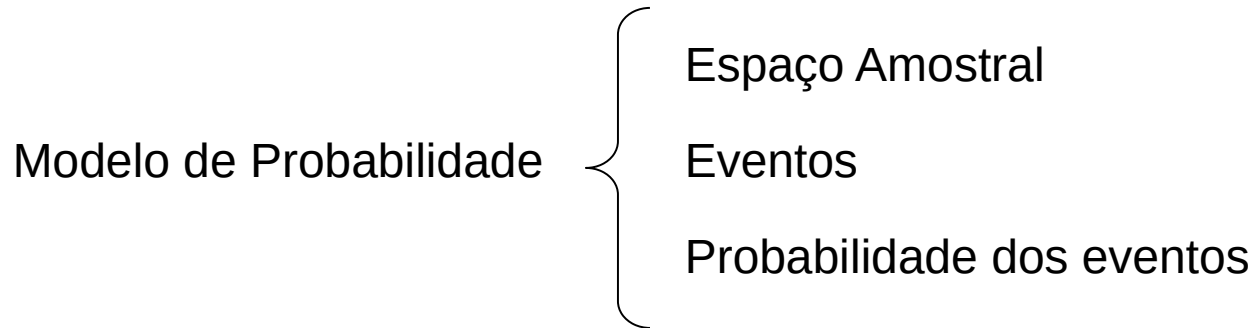


DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA

É definida como uma **função** que define uma curva, e a área sob essa curva determina a **probabilidade** de ocorrer o evento por ela correlacionado.



Conceitos



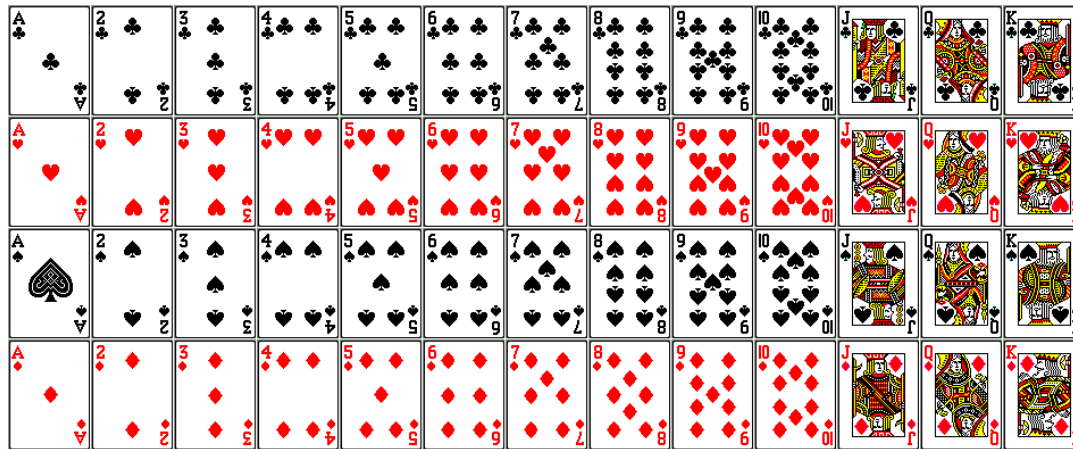
Espaço amostral: todos os resultados possíveis

Evento: um subgrupo do espaço amostral

Probabilidade: A probabilidade que um evento produzirá certo resultado.

Probabilidades

Considerando um jogo de cartas completo...



Espaço amostral? 52 cartas

Evento?

V: A carta é vermelha.

F: A carta é uma figura.

C: A carta é de copas.

3: A carta é um 3.

Probabilidade?

$$P(V) = 26/52$$

$$P(F) = 12/52$$

$$P(C) = 13/52$$

$$P(3) = 3/52$$

Variáveis Aleatórias

Variáveis Discretas número ou a quantidade observada na unidade experimental ou tentativa.

- Representada por números inteiros (0, 1, 2, 3, 4...);
- Não pode conter números negativos;
- Número finito de possibilidades;
- Podemos achar a probabilidade de cada evento.



Variáveis Contínuas usualmente medidas contínuas como peso, altura, distância, pH, biomassa, etc.

- Representada por números não inteiros (1,3 - 1,54 - 1,7);
- Pode conter números negativos;
- Número sempre infinito de possibilidades;
- Probabilidade de cada evento é zero, usamos intervalo.



Algumas distribuições estatística

Distribuição de Probabilidade Discreta

- Binomial
- Bernoulli
- Geométrica
- Multinomial
- Poisson
- Negativa Binomial
- Beta-Binomial

Distribuição de Probabilidade Contínua

- Exponencial
- Normal ou Gaussiana
- Beta
- Lognormal
- Gamma
- Uniforme
- Chi-Square
- Cauchy

Distribuições estatísticas

Distribuição de Probabilidade Discreta

- **Binomial**
- Bernoulli
- Geométrica
- Multinomial
- **Poisson**
- Negativa Binomial
- Beta-Binomial

Distribuição de Probabilidade Contínua

- Exponencial
- **Normal ou Gaussiana**
- Beta
- Lognormal
- Gamma
- Uniforme
- Chi-Square
- Cauchy

Funções de probabilidade

Variável Aleatória Discreta

Espaço Amostral
Finito
e.g. $\{0, 1, 2, 3\}$

Função de Distribuição de Probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

$$1. p(x_i) \geq 0, \text{ for all } i$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Variável Aleatória Contínua

Espaço Amostral
Infinito
e.g. $[0,1], [2.1, 5.3]$

Função Densidade de Probabilidade

$$f(x)$$

$$1. f(x) \geq 0, \text{ para todos } x \text{ em } R_x$$

$$2. \int_{R_x} f(x) dx = 1$$

$$3. f(x) = 0, \text{ se } x \text{ não está em } R_x$$

Função de Distribuição Acumulada

$$p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

$$p(X \leq x)$$

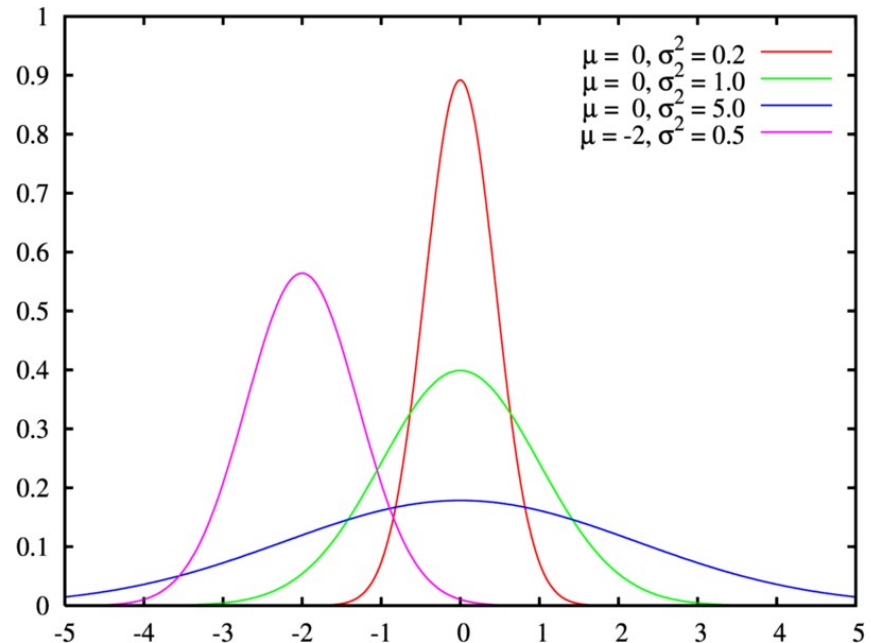
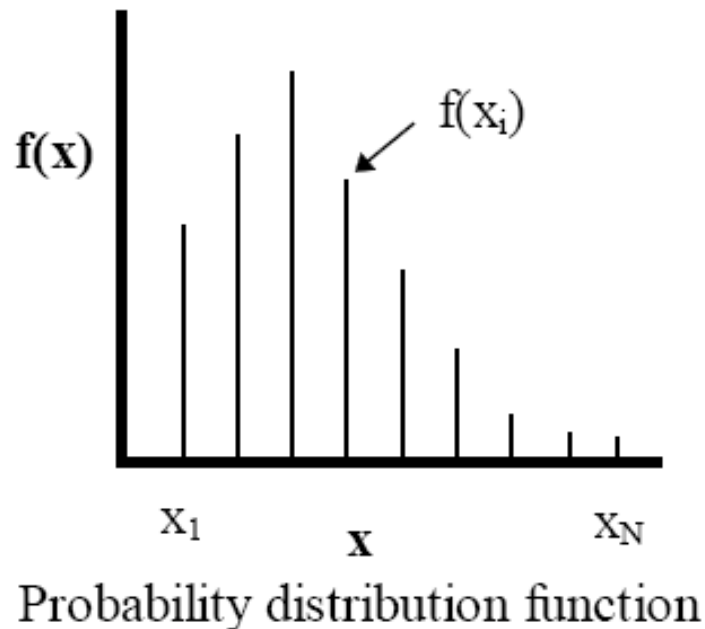
$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Funções de probabilidade

Função distribuição de probabilidade ou Função densidade de probabilidade

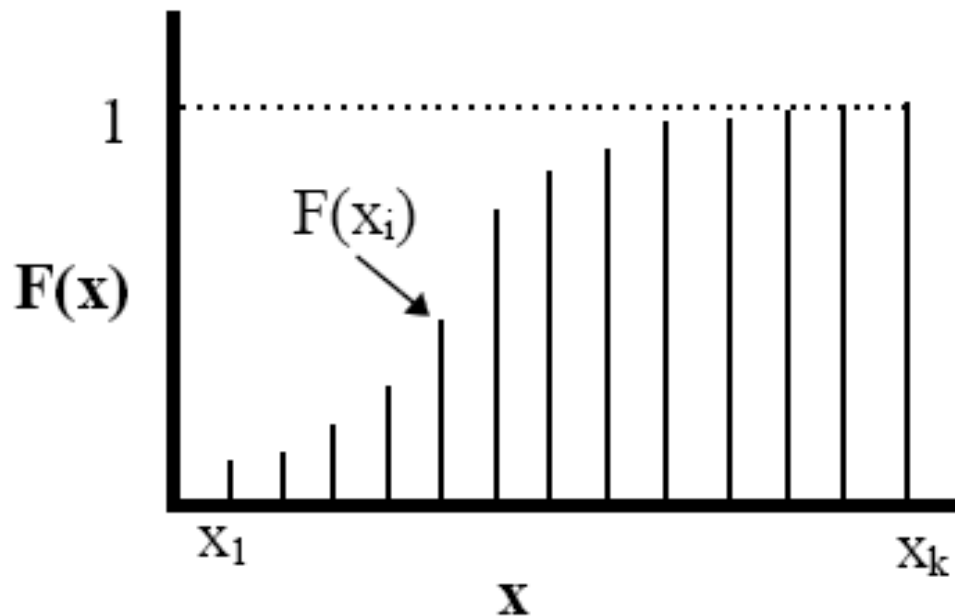
A função probabilidade associa cada possível valor da variável aleatória (X) à sua probabilidade de ocorrência $P(X)$.



Funções de probabilidade

Função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada (F) é igual à probabilidade de que a variável aleatória X assumira um valor inferior ou igual a determinado x .



Cumulative distribution function

Distribuição de Probabilidade Discreta

- **Binomial**
- **Poisson**

Distribuição Binomial

É a distribuição de probabilidade **discreta** do **número de sucessos (K)** numa sequência de **n tentativas** tais que as tentativas são **independentes**; cada tentativa resulta apenas em duas possibilidades, sucesso ou fracasso; a probabilidade de cada tentativa, **p** , **permanece constante**.

- 1) sucesso (S) ou fracasso (F)
- 2) a probabilidade de sucesso é constante
- 3) Os experimentos são independentes

$$X \sim B(n, p)$$

Distribuição Binomial

Função de Probabilidade

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Valor Esperado ou Média

$$E[X] = np$$

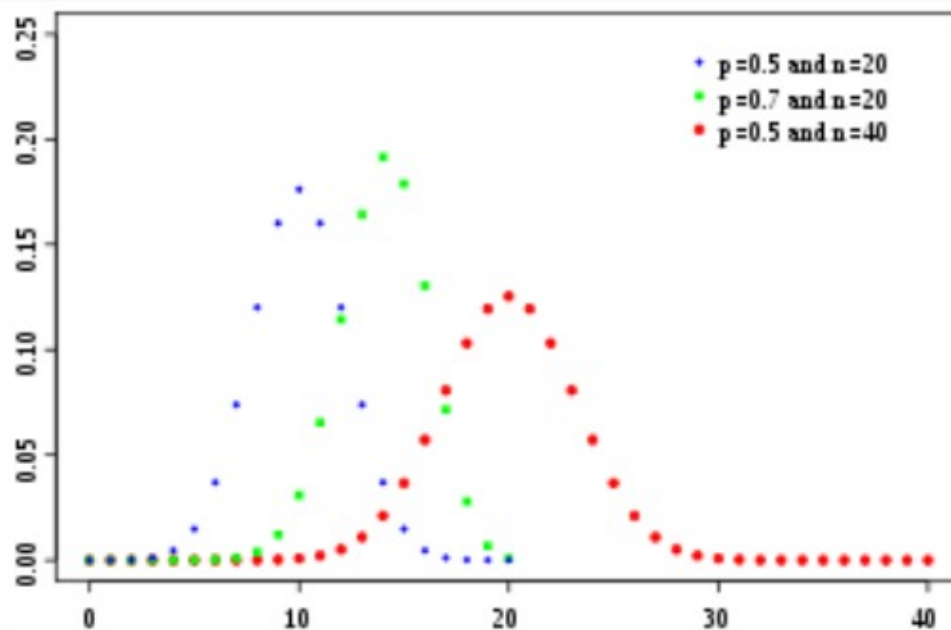
Variância

$$\text{Var}[X] = np(1 - p).$$

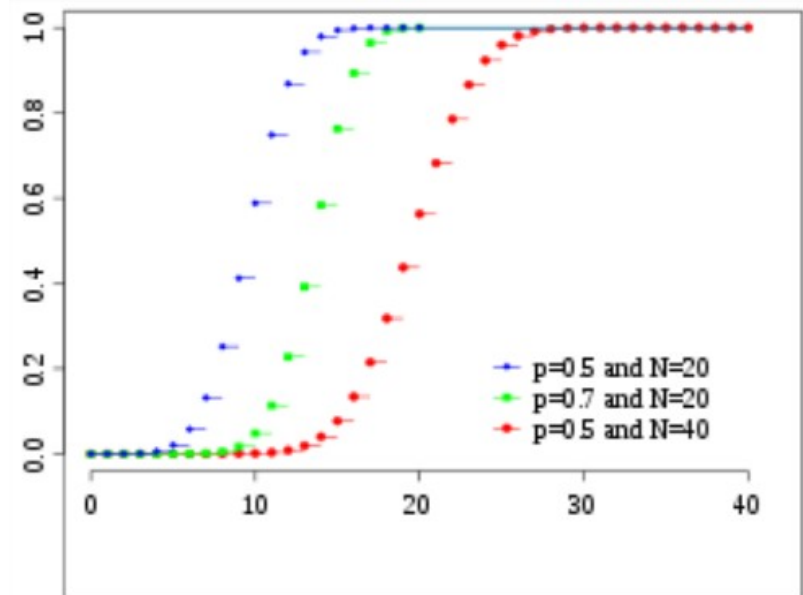
Distribuição Binomial

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

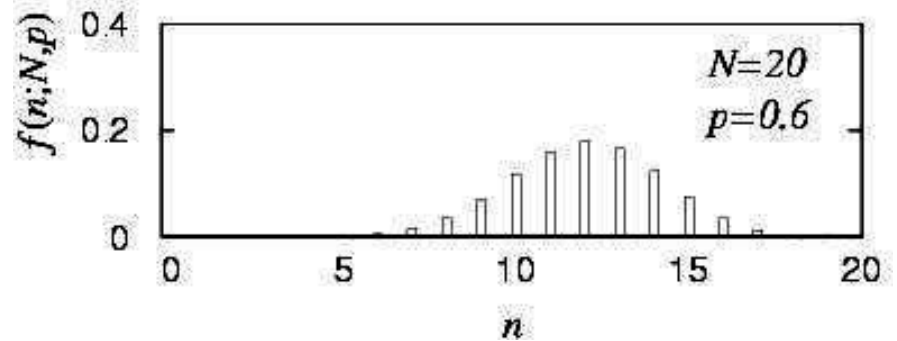
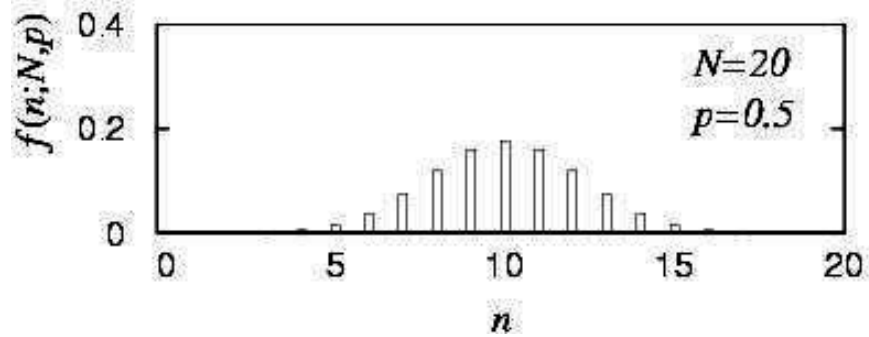
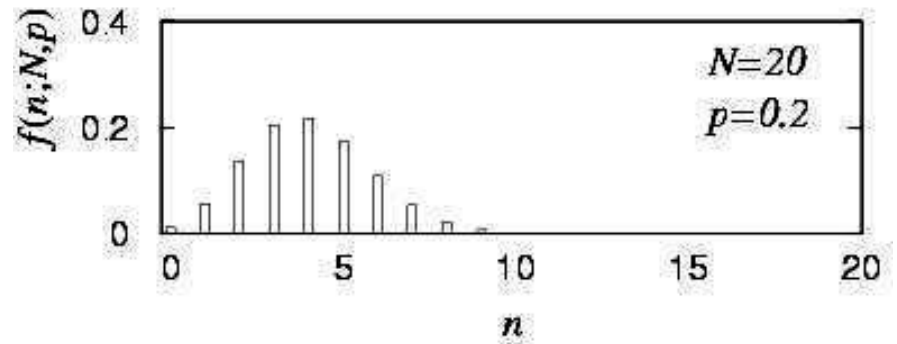
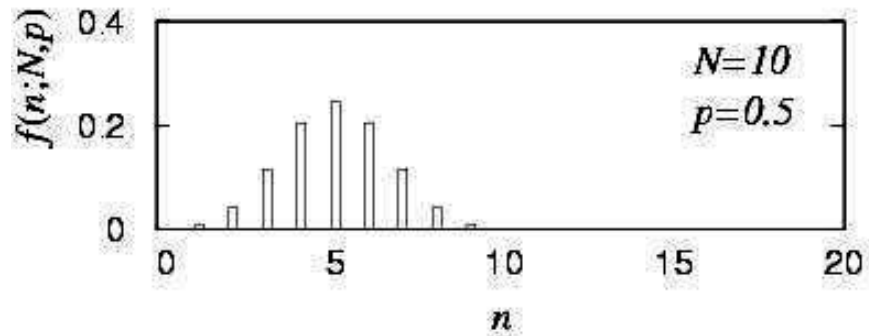
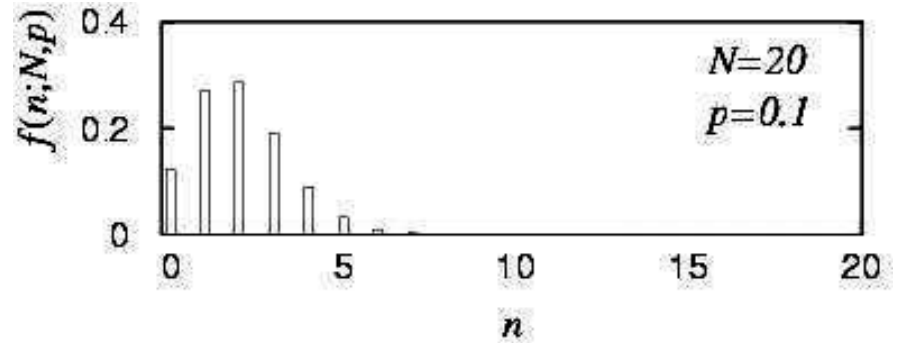
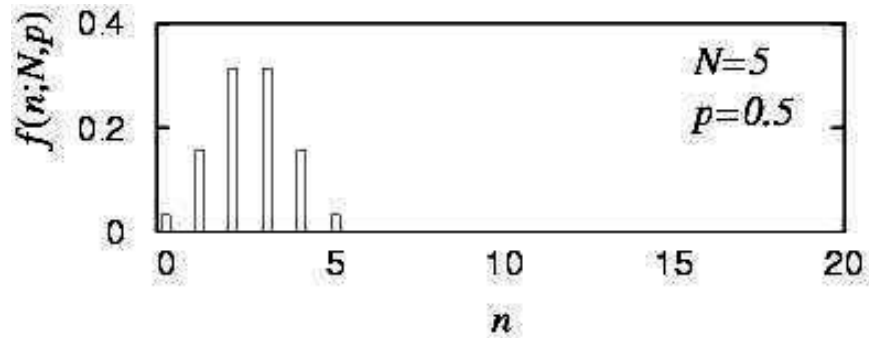
Função distribuição de probabilidade



Função de distribuição acumulada



Distribuição Binomial



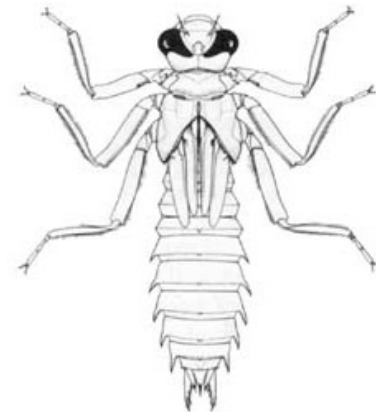
Distribuição Binomial – Exemplo 1

Há uma probabilidade de 0,3 de um girino, ao forragear em um corpo d'água, ser predado por uma larva de odonata. Determine as probabilidades de que, dentre seis girinos que estão forrageando no corpo d'água, 0, 1, 2, 3, 5 ou 6 sejam predados.

k ?

n ?

p ?



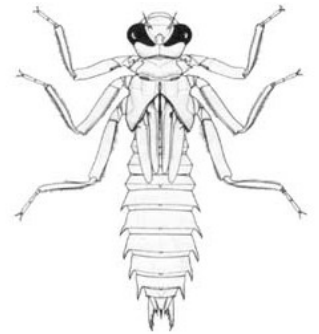
Distribuição Binomial – Exemplo 1

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6$$

$$n = 6$$

$$p = 0,3$$

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



$$P(0) = \binom{6}{0} (0,30)^0 (0,70)^6 \approx 0,118$$

$$P(4) = \binom{6}{4} (0,30)^4 (0,70)^2 \approx 0,060$$

$$P(1) = \binom{6}{1} (0,30)^1 (0,70)^5 \approx 0,303$$

$$P(5) = \binom{6}{5} (0,30)^5 (0,70)^1 \approx 0,010$$

$$P(2) = \binom{6}{2} (0,30)^2 (0,70)^4 \approx 0,324$$

$$P(6) = \binom{6}{6} (0,30)^6 (0,70)^0 \approx 0,001$$

$$P(3) = \binom{6}{3} (0,30)^3 (0,70)^3 \approx 0,185$$

Distribuição Binomial – Exemplo 2

Sabendo que a probabilidade de uma planta carnívora capturar um inseto é 0,5. Qual a probabilidade de que a planta capture 5 insetos em 12 tentativas?

k ?

n ?

p ?

$$f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



$$f(5; 12, 0.5) = \binom{12}{5} 0.5^5 (1 - 0.5)^{12-5} = 0.19$$

Distribuição Binomial – Exemplo 3



Um pesquisador amostrou 100 localidades diferentes na Mata Atlântica coletando uma espécie de bromélia. Qual a probabilidade de 40 localidades terem a bromélia?

$k ?$

$n ?$

$p = 0.5$

$$P(40) = \binom{100}{40} (0.5)^{40} (1 - 0.5)^{100 - 40} = 0.01$$

Distribuição Binomial – Exemplo 4

$k ?$

$n = 4$

$p = 0.25$



$$\Pr(0 \text{ goals}) = f(0) = \Pr(K = 0) = \binom{4}{0} 0.25^0 (1 - 0.25)^{4-0} \approx 0.32$$

$$\Pr(1 \text{ goal}) = f(1) = \Pr(K = 1) = \binom{4}{1} 0.25^1 (1 - 0.25)^{4-1} \approx 0.42$$

$$\Pr(2 \text{ goals}) = f(2) = \Pr(K = 2) = \binom{4}{2} 0.25^2 (1 - 0.25)^{4-2} \approx 0.21$$

$$\Pr(3 \text{ goals}) = f(3) = \Pr(K = 3) = \binom{4}{3} 0.25^3 (1 - 0.25)^{4-3} \approx 0.05$$

$$\Pr(4 \text{ goals}) = f(4) = \Pr(K = 4) = \binom{4}{4} 0.25^4 (1 - 0.25)^{4-4} \approx 0.004$$

Distribuição Binomial no



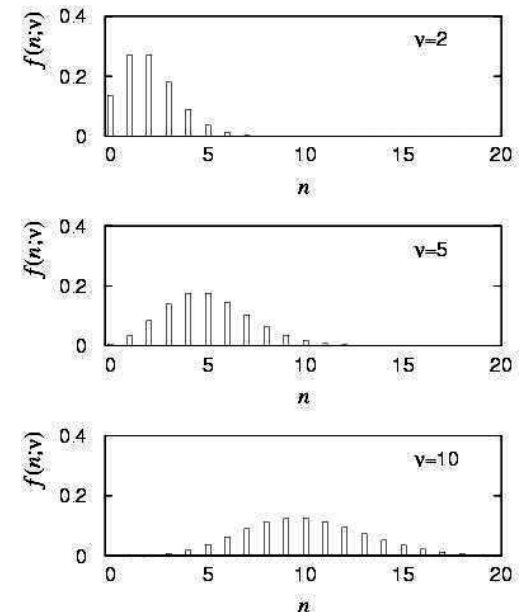
Distribuição Poisson

Expressa a probabilidade de uma série de eventos que ocorrem em um período fixo de tempo, área, volume, quadrante, etc.

Enquanto a **distribuição binomial** pode ser usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos em n tentativas, a **distribuição de Poisson** é usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo de tempo, área, volume, etc.

- 1) A variável aleatória é o número de eventos em cada amostra
- 2) As ocorrências de cada evento são independentes
- 3) As probabilidade é a mesma em qualquer intervalo

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$



Distribuição Poisson

Função de Probabilidade

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

e= 2,71828

Valor Esperado ou Média

$$E[X] = \lambda$$

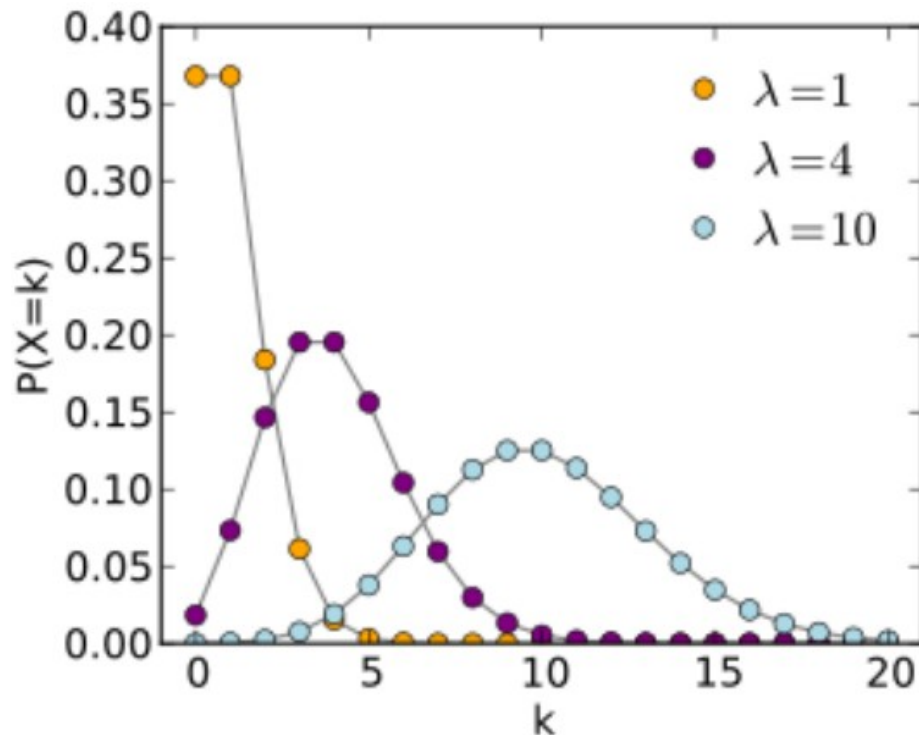
Variância

$$\text{Var } [X] = \lambda$$

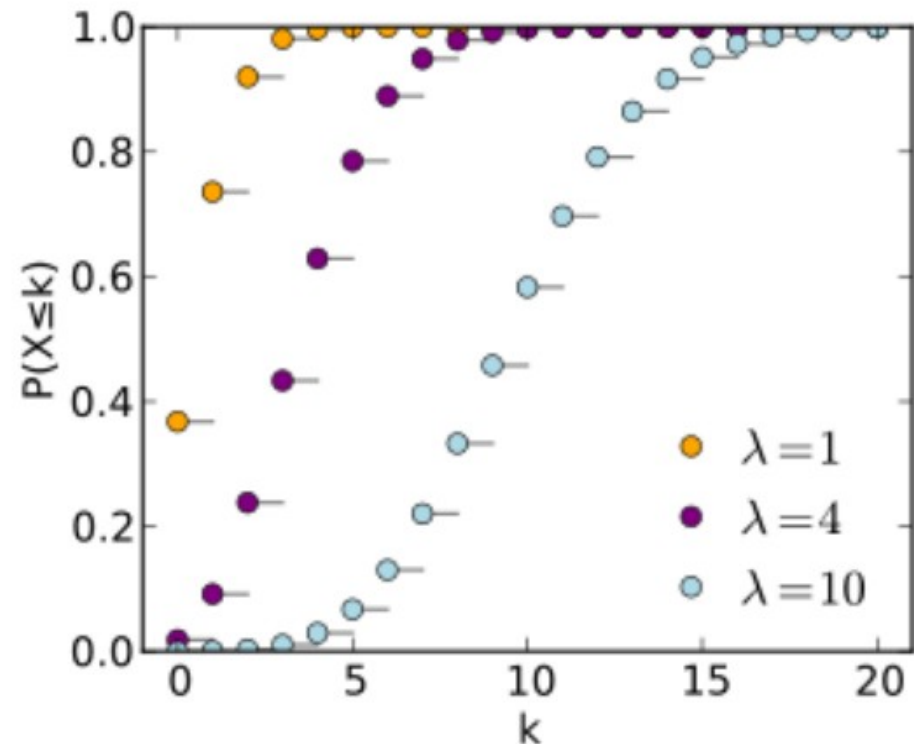
Distribuição Poisson

$$f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

Função distribuição de probabilidade

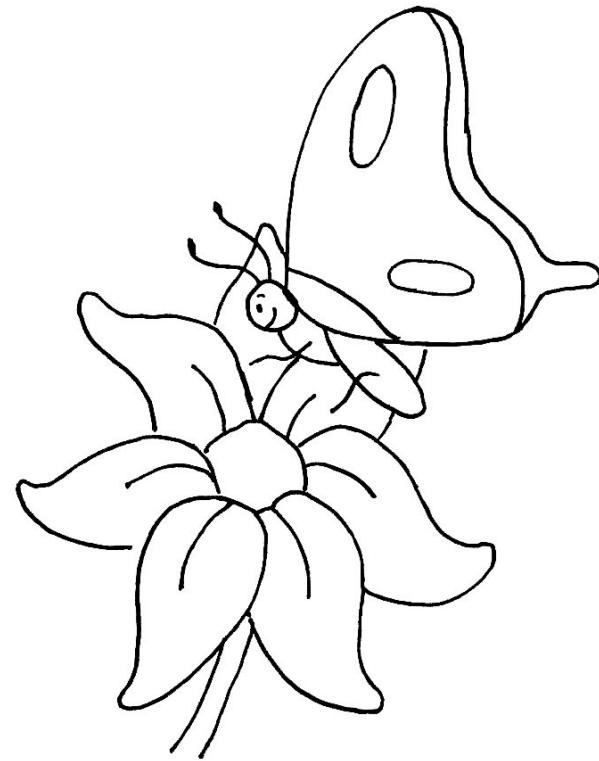


Função de distribuição acumulada



Distribuição Poisson – Exemplo 1

- Suponha que observamos o número de visitas de borboletas em uma flor durante um período de 15 minutos.
- A probabilidade de uma borboleta chegar é a mesma para quaisquer dois períodos de tempo de igual comprimento.
- A visita ou não de uma borboleta em qualquer período de tempo é independente da visita ou não de uma outra borboleta em qualquer outro período de tempo.



Distribuição Poisson – Exemplo 1

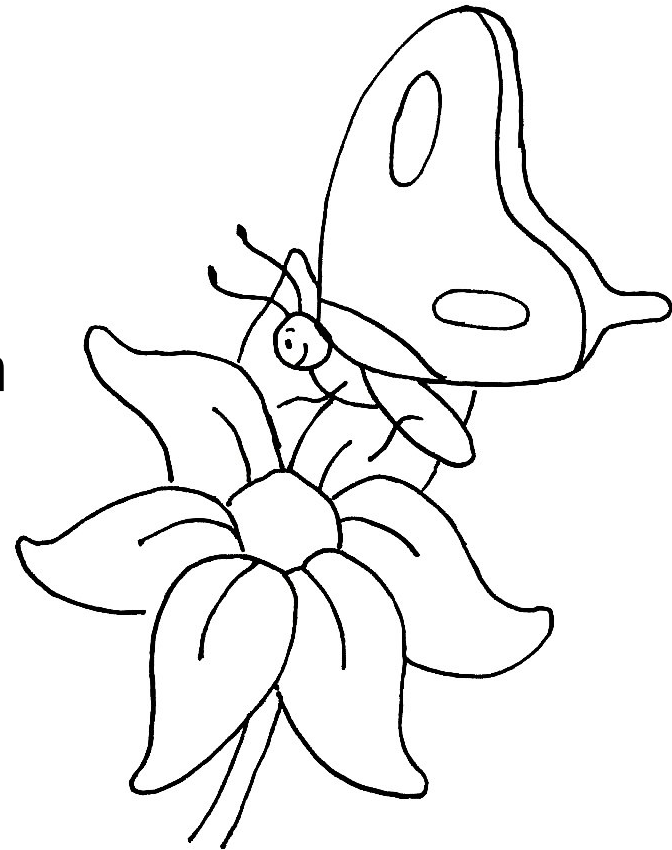
Suponha que o número médio de borboletas que vistiam a flor no período de 15 minutos é 10, então

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

X: número de borboletas que chegam em qualquer período de 15 minutos

A probabilidade de 5 chegadas em 15 minutos

$$P(X = 5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0,0378$$



Distribuição Poisson – Exemplo 2

- Suponha que haja em média 2 filhotes albinos por ano numa população de 50.000 pandas. Encontre a probabilidade de que em um dado ano tenha havido:
 - a. 0;
 - b. 1;
 - c. 2;
 - d. 2 ou mais albinos.



Distribuição Poisson – Exemplo 2

$$P(X = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0,13$$

$$P(X = 1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0,27$$

$$P(X = 2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,27$$



Distribuição Binomial e Poisson

$$X \sim B(n, p)$$

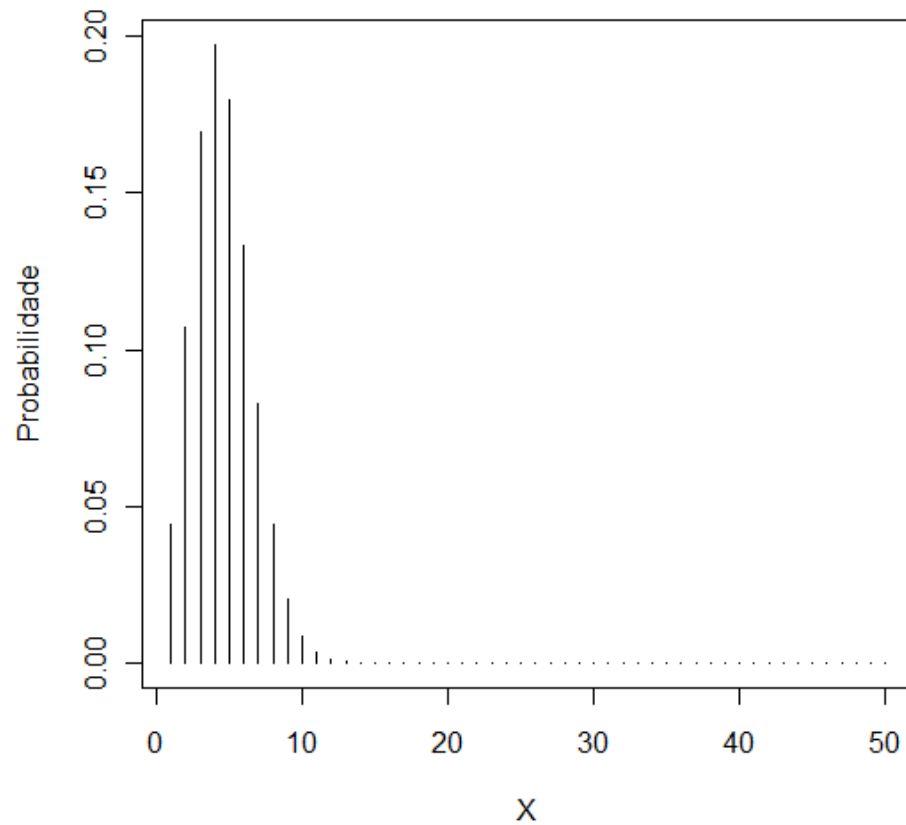
Se **N** for grande e **p** for pequeno, o evento é raro. Na prática:

$N \geq 50$ ou 100 e $Np < 5$ ou 10 , então o evento é raro.

Neste caso, a distribuição binomial é muito aproximada da de Poisson, com **$\lambda = Np$**

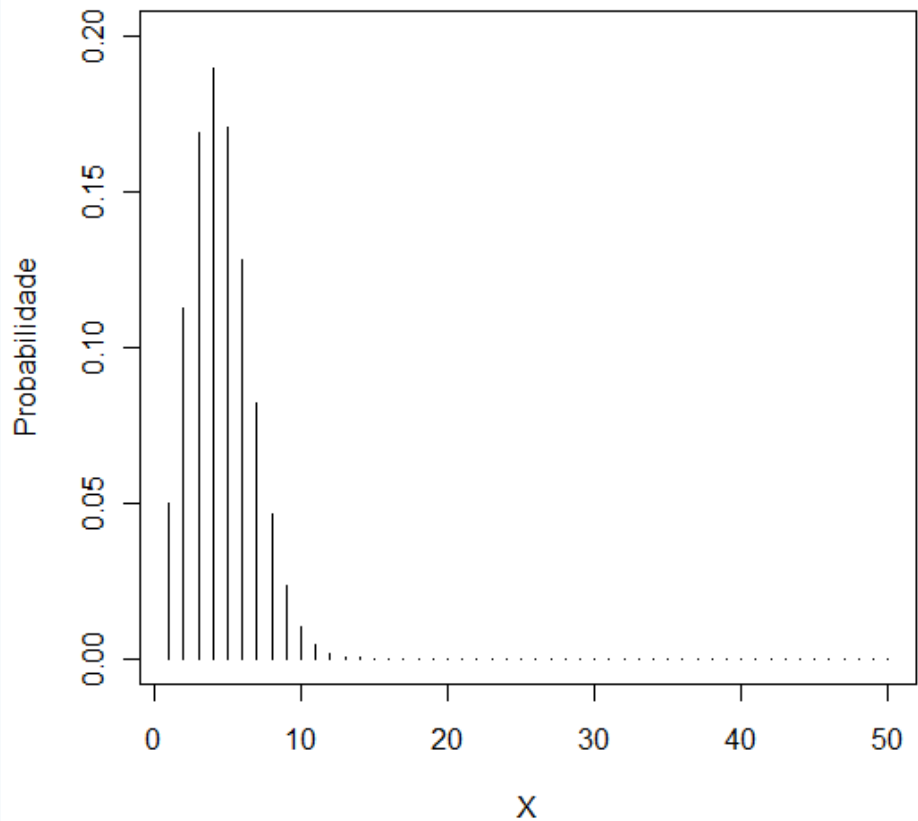
Distribuição Binomial e Poisson

Distribuição Binomial



$$N = 50 \quad p = 0.09$$

Distribuição Poisson



$$\lambda = 50 * 0.09$$

Distribuição Poisson no



Distribuição de Probabilidade Contínua

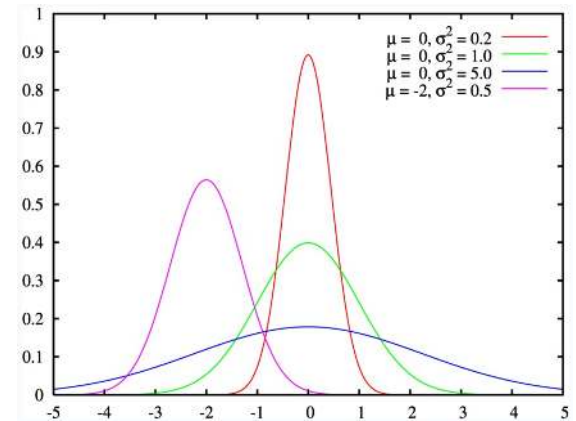
- **Normal ou Gaussiana**

Distribuição Normal

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições com variáveis com probabilidades contínuas, conhecida também como Distribuição de Gauss ou Gaussiana

É inteiramente descrita por seus parâmetros de **média** e **desvio padrão**, ou seja, conhecendo-se estes consegue-se determinar qualquer probabilidade em uma distribuição Normal.

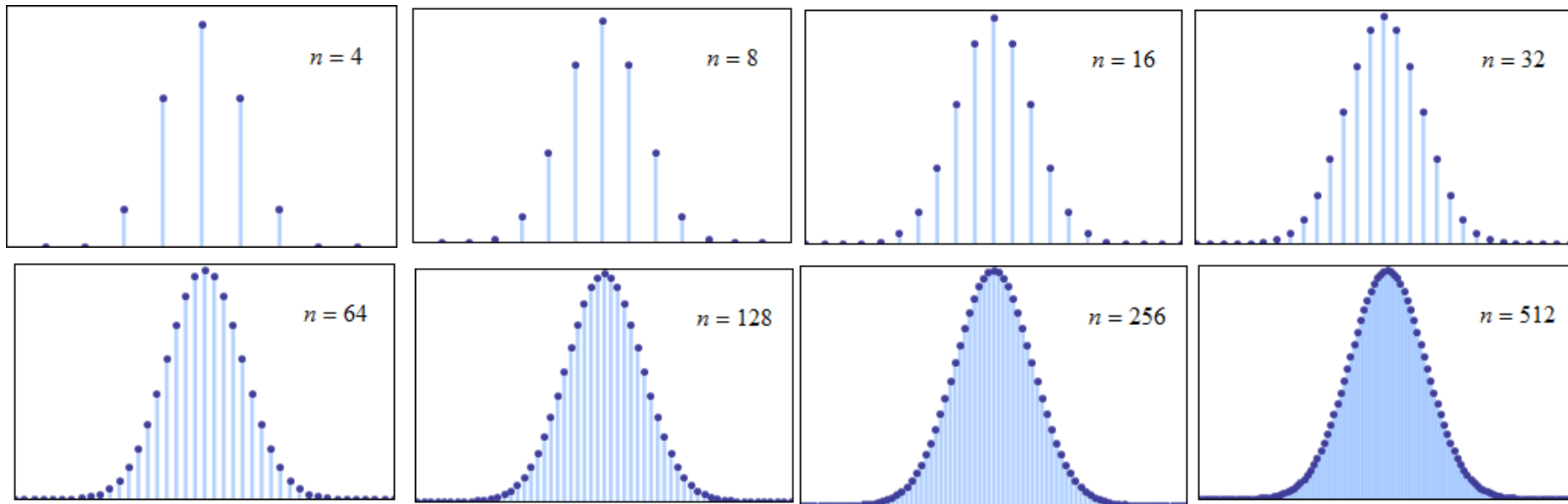
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



A importância da distribuição normal como um modelo de fenômenos quantitativos é devido em parte ao **Teorema do Limite Central**.

Teorema do Limite Central

O teorema afirma que sob certas condições, a soma de um grande número de variáveis aleatórias, teremos uma distribuição aproximadamente normal

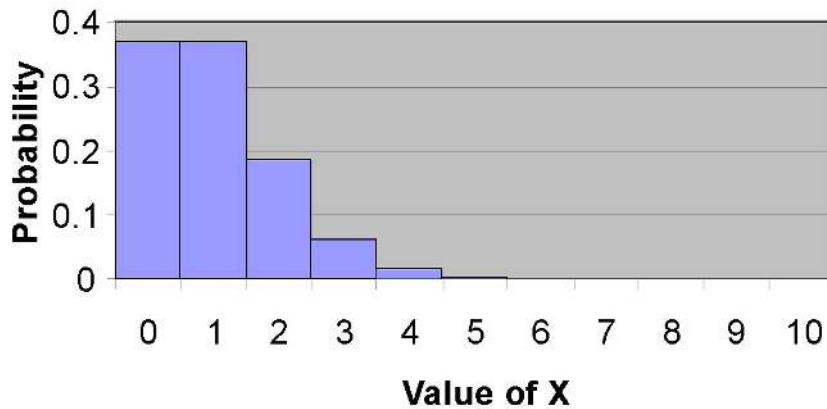


A **distribuição binomial** $B(n, p)$ é aproximadamente normal $N(np, np(1 - p))$ para grandes n e para p não tão próximos de 0 ou 1.

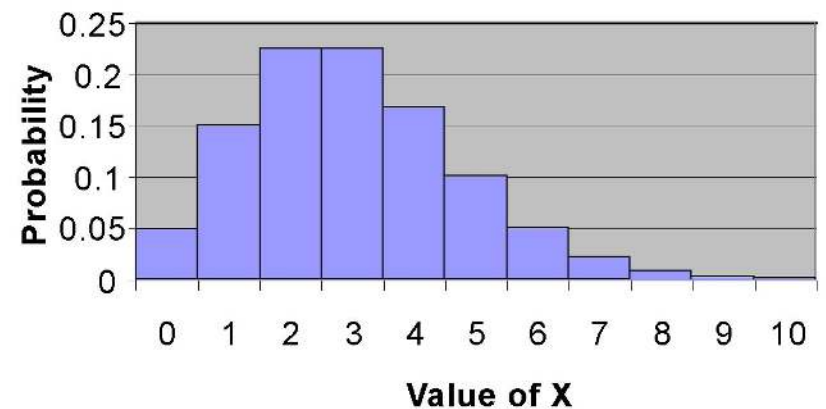
A **distribuição poisson** $\text{Pois}(\lambda)$ é aproximadamente normal $N(\lambda, \lambda)$ para grandes valores de λ .

Teorema do Limite Central

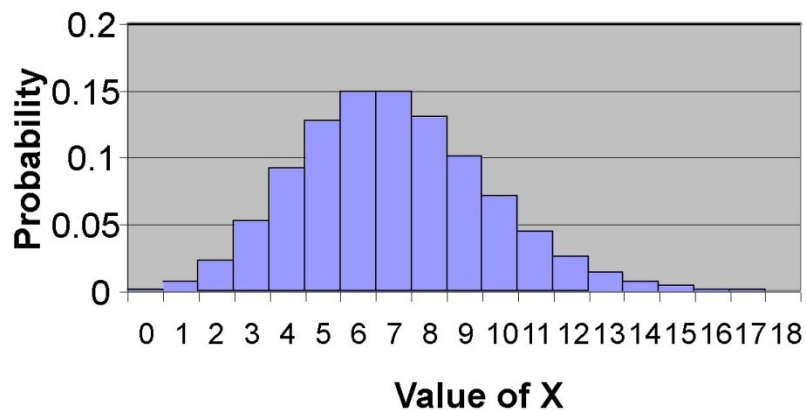
$\lambda = 1$



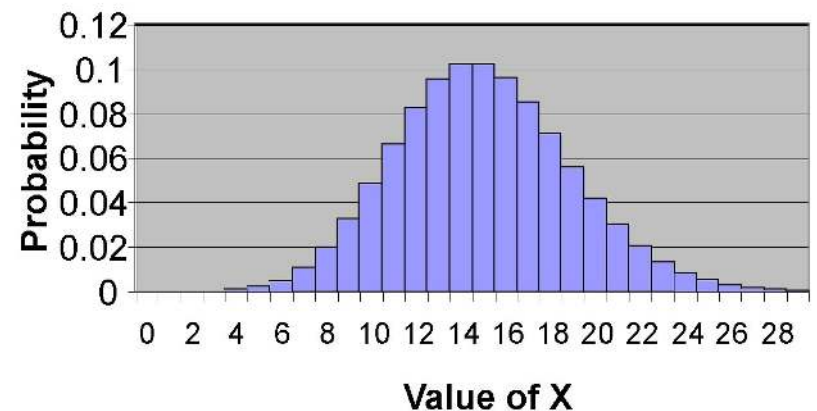
$\lambda = 3$



$\lambda = 7$



$\lambda = 15$



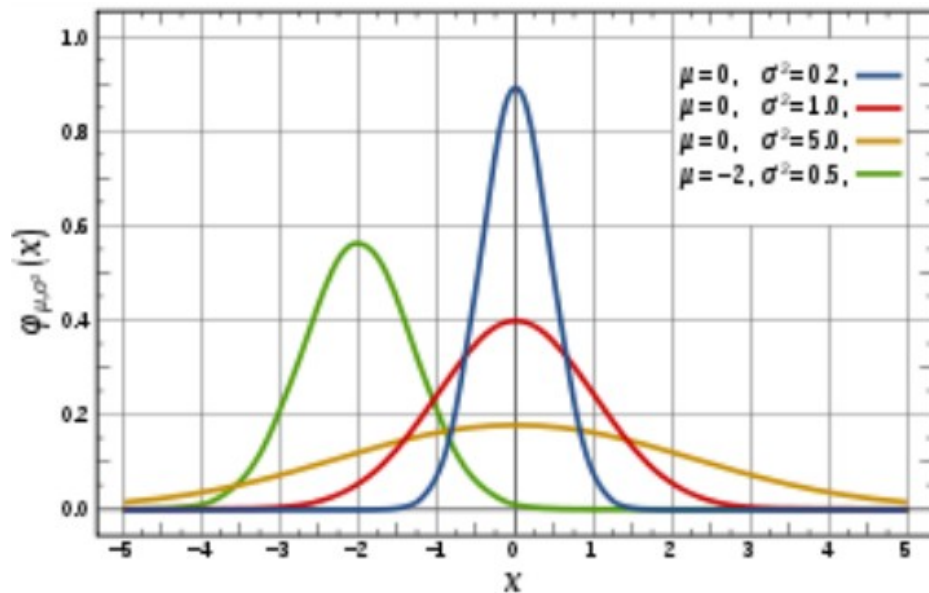
Teorema do Limite Central

<http://www.socr.ucla.edu/Applets.dir/SamplingDistributionApplet.html>

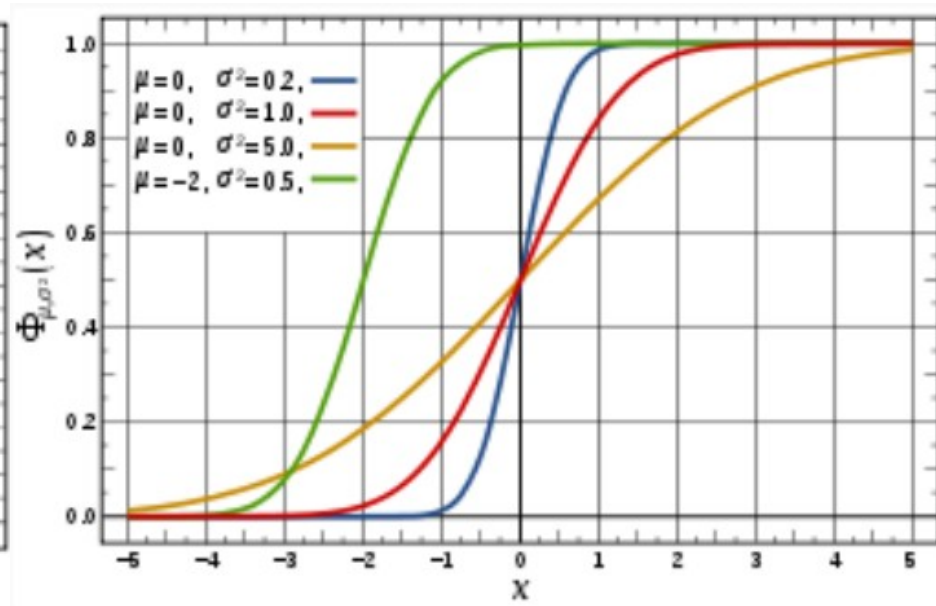
Distribuição Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Função densidade de probabilidade



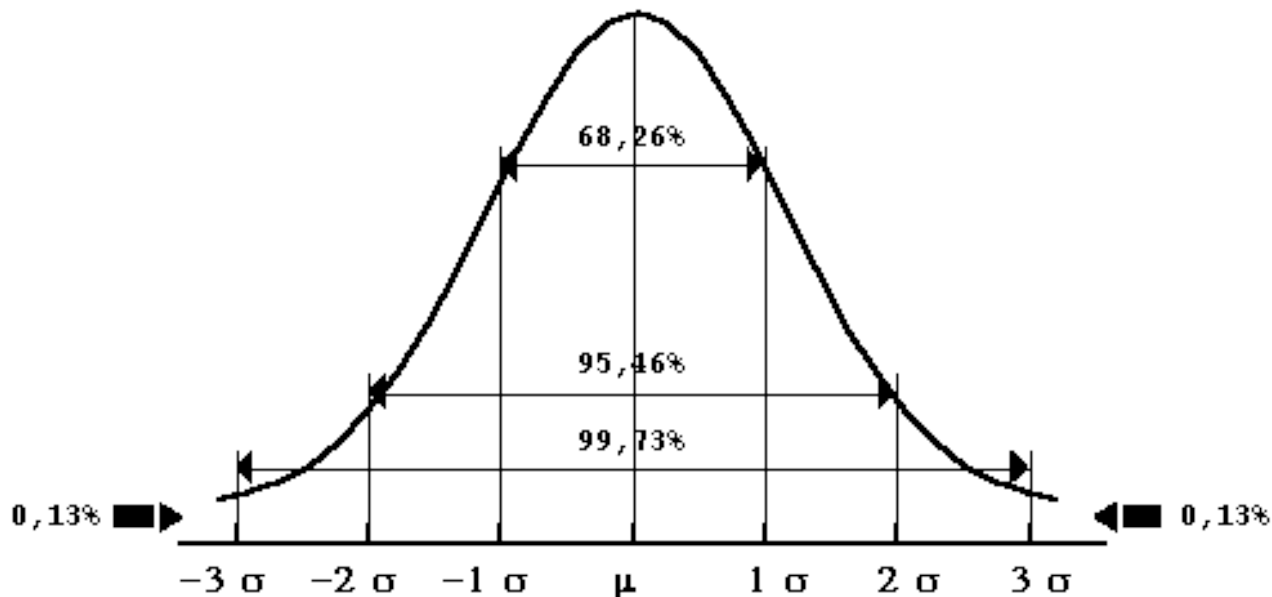
Função de distribuição acumulada



Distribuição Normal

Variáveis aleatórias que são aproximadamente normal apresentam as seguintes propriedades:

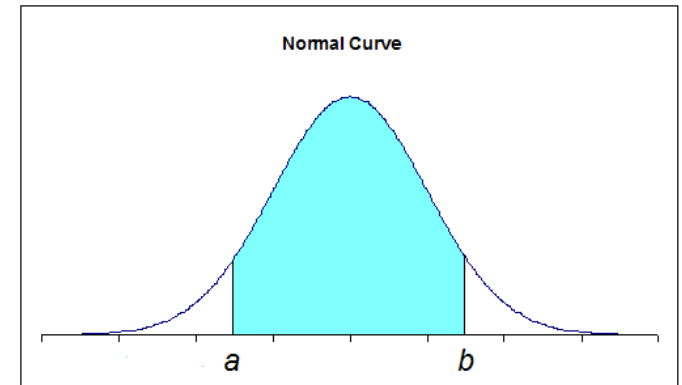
- Metade (50%) está acima (e abaixo) da média
- Aproximadamente 68% está dentro de 1 desvio padrão da média
- Aproximadamente 95% está dentro de 2 desvios padrões da média
- Virtualmente todos os valores estão dentro de 3 desvios padrões da média



Distribuição Normal Padronizada

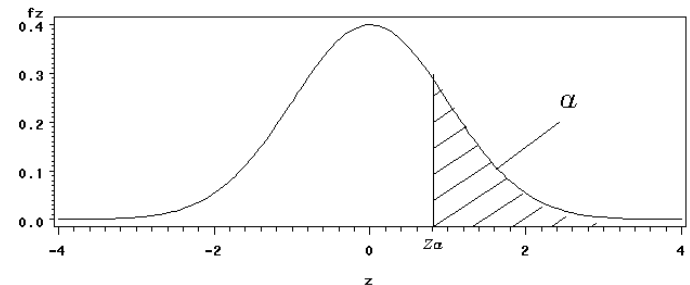
Na prática desejamos calcular probabilidades para diferentes valores de μ e σ . Para isso teríamos que realizar uma integral:

$$P(a < x < b) = \int_a^b \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$



Para facilitar, a variável **X** cuja distribuição é **N (μ , σ)** é transformada numa forma padronizada **Z** com distribuição **N (0, 1)** (**distribuição normal padrão**) cuja distribuição é tabelada. A quantidade **Z** é dada por :

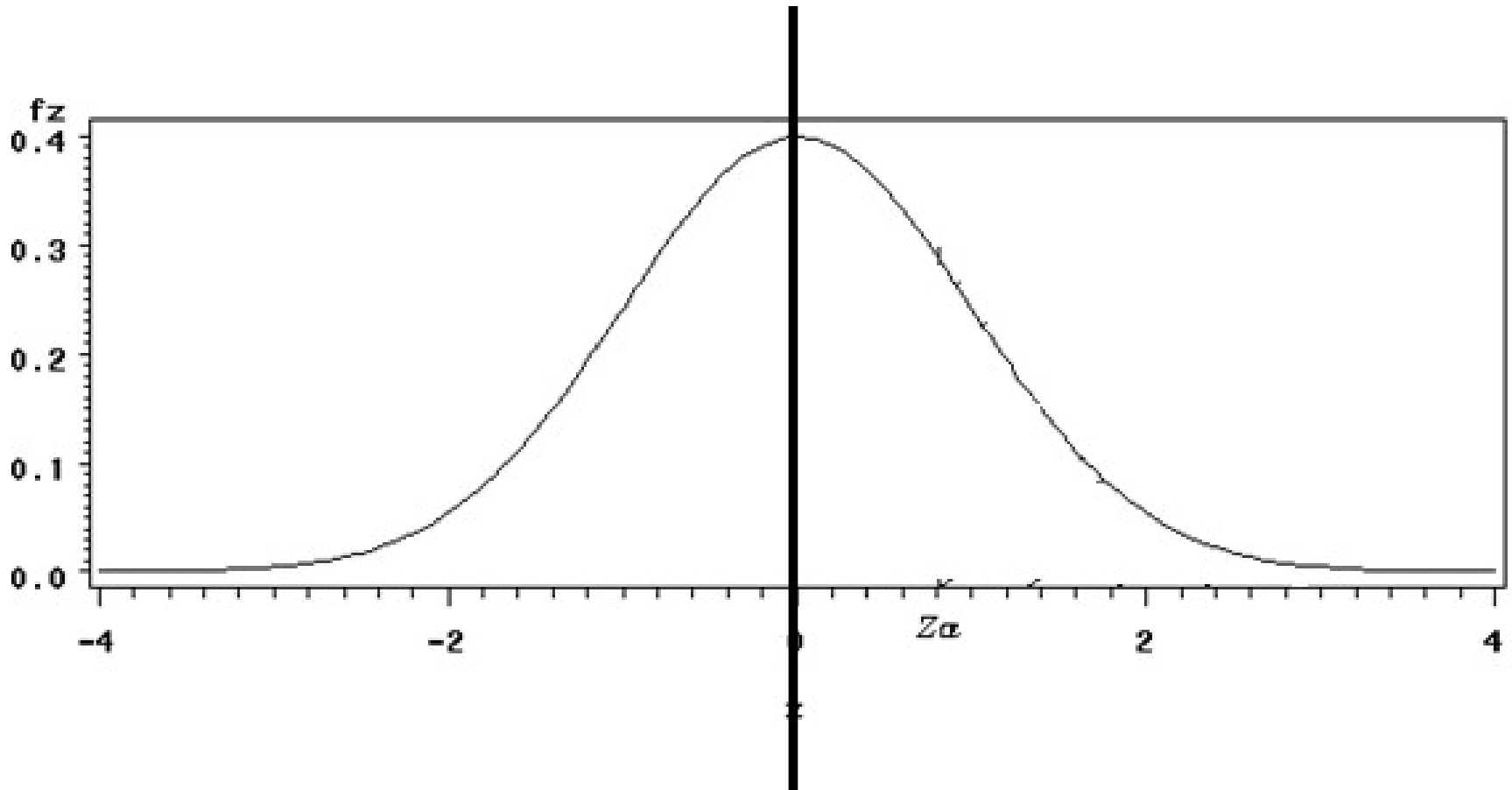
$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$



Distribuição Normal Padronizada

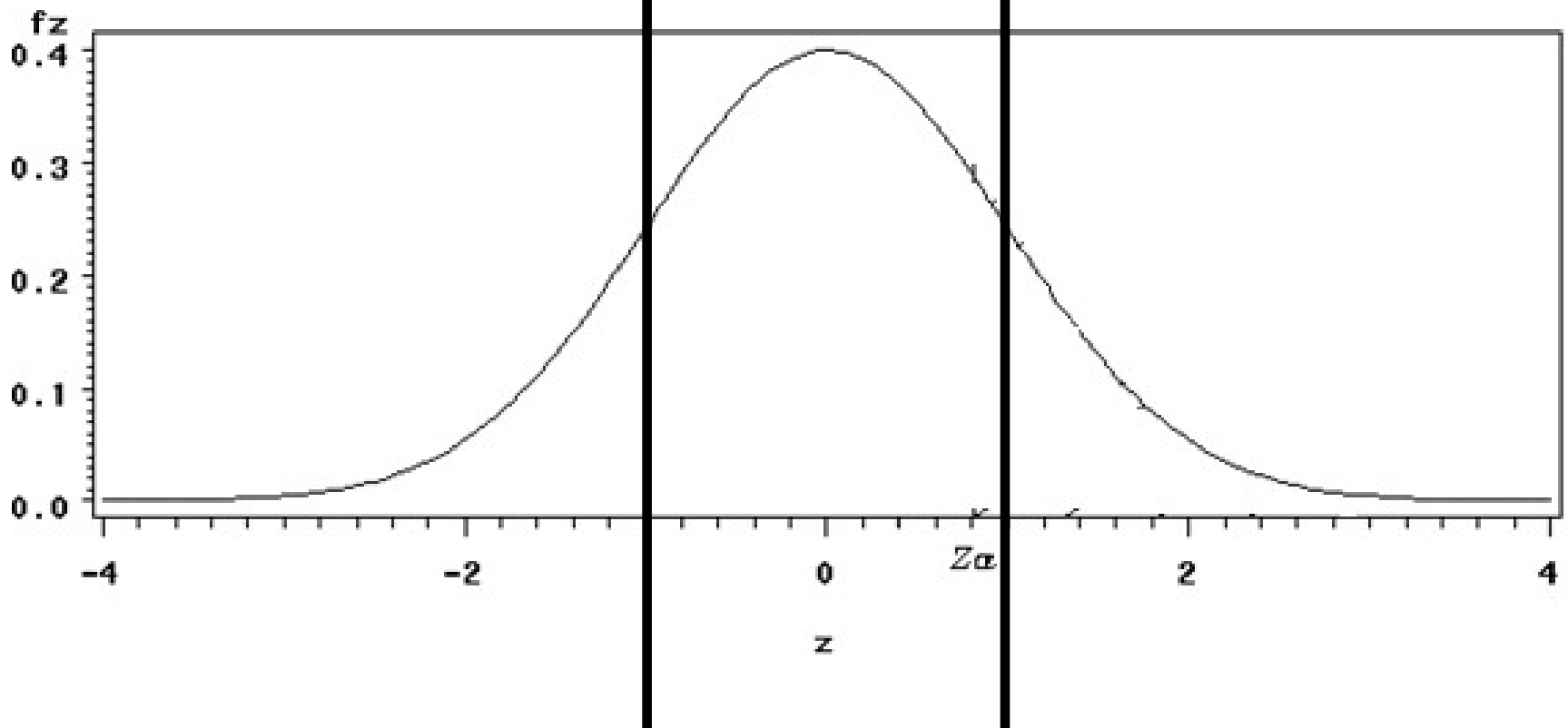
$$- P(Z \geq 0) = P(X \geq \mu) = 0.5000$$

$$- P(Z \leq 0) = P(X \leq \mu) = 0.5000$$



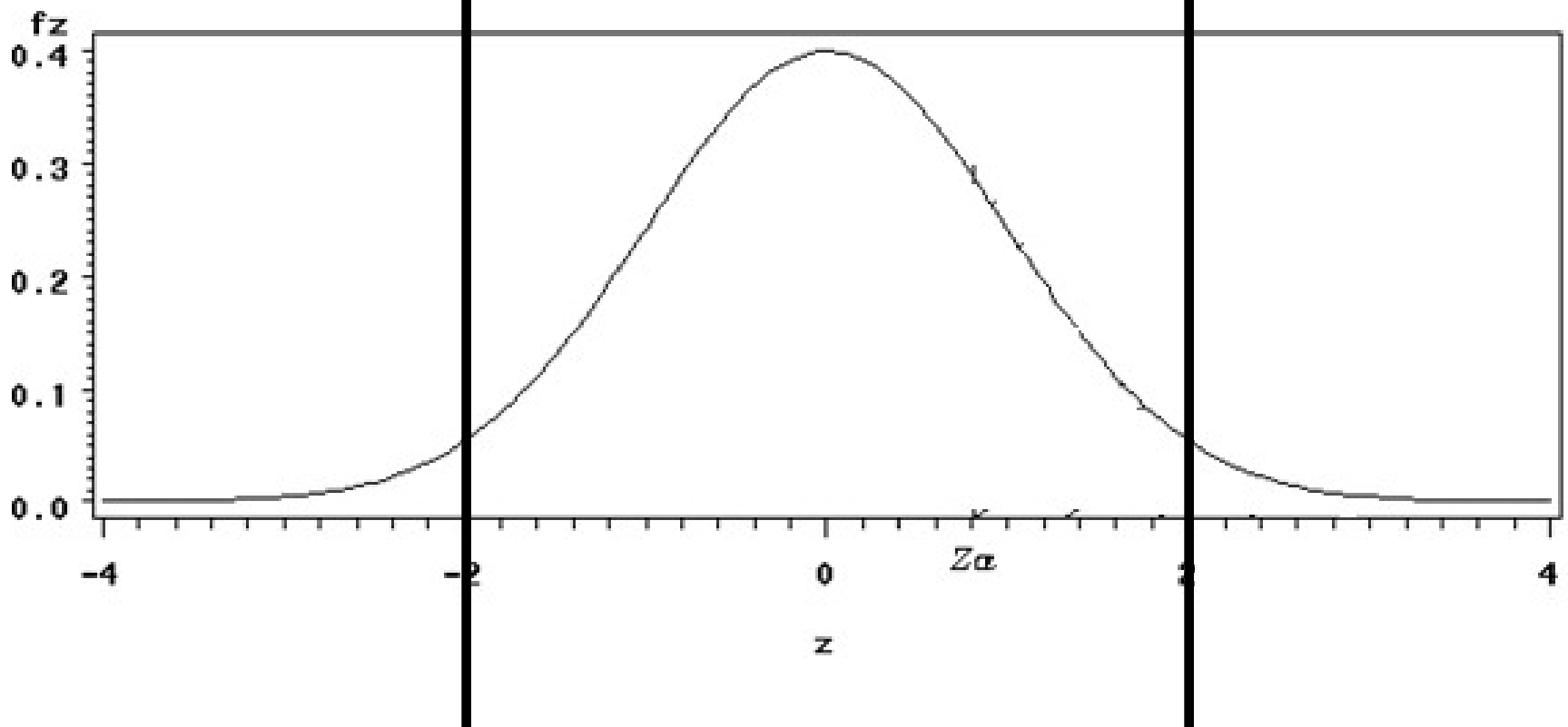
Distribuição Normal Padronizada

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$



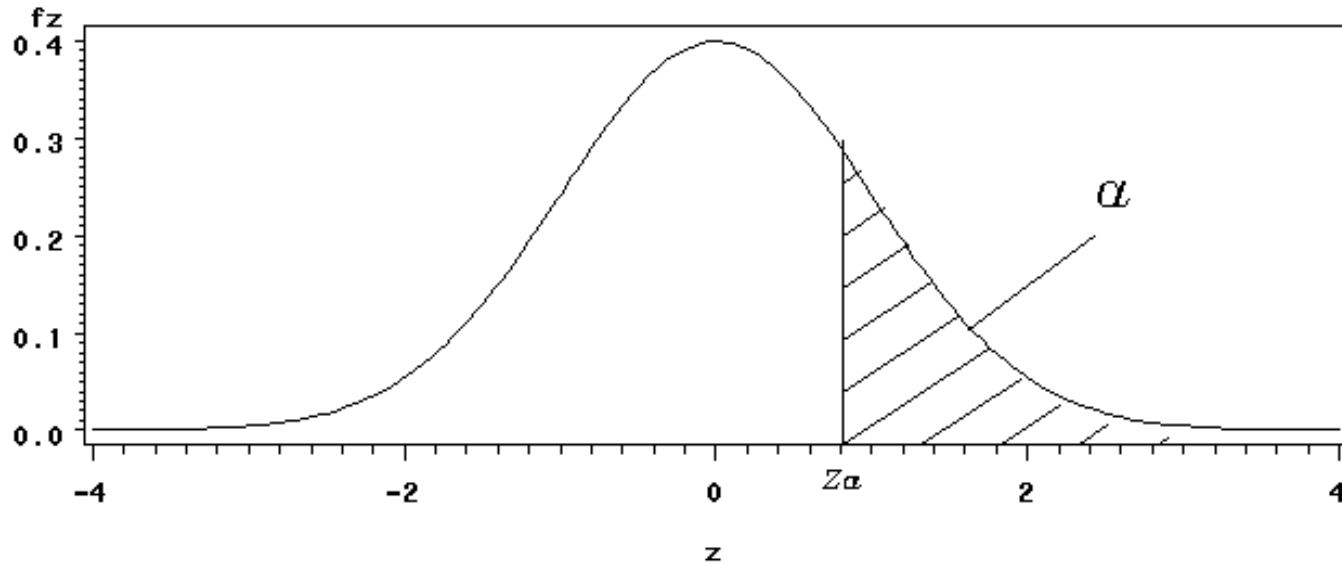
Distribuição Normal Padronizada

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$$



Distribuição Normal Padronizada

$$P(Z \geq z_\alpha) = P(Z \leq -z_\alpha) = \alpha \quad (\text{Tabela com valores de } Z)$$

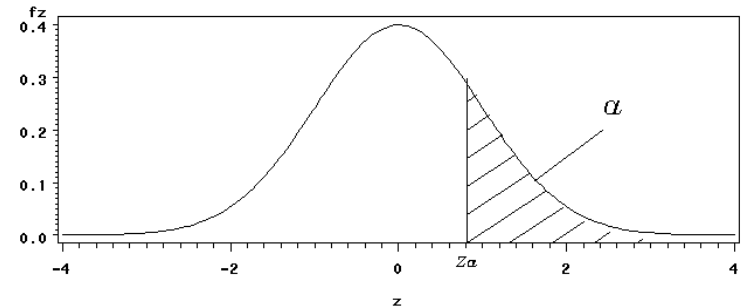


Distribuição Normal - Exemplo

Passo 1 - Sabendo que uma população de peixe apresenta $\sim N(17.1, 1.21)$
Qual é a probabilidade que um peixe capturado aleatoriamente tenha 20.15 cm ou mais?

Passo 2 - $Y_L = 20.15$ $Y_U = \infty$ ----->

Passo 3 -



$$Z_L = \frac{20.15 - 17.1}{1.21} = 2.52 \quad Z_U = \infty$$

Passo 4 - $P(X \geq 20.15) = P(Z \geq 2.52) = .0059$ ($\approx 1/170$)

<i>z</i>	.00	.01	.02 ↓	.03
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075
2.5 →	.0062	.0060	.0059	.0057
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043

Distribuição Normal no

